CAPITULO 5.

LAS CRISIS DE LOS FUNDAMENTOS.

"En la búsqueda de la verdad, el mejor plan podría ser comenzar por la crítica de nuestras más caras creencias". K. R. Popper.

"Después de más de dos mil años de continua refutación, las paradojas de Zenón, se reestablecen para convertirse en fundamento de un renacer de las matemáticas". B. Russell.

5.0 – Paradojas de Zenón. Introducción[1].

Para los matemáticos, las paradojas más conocidas son las originadas en el filósofo griego Zenón de Elea. Antes de entrar en detalle en la descripción y estudio de las mismas, miremos algunos aspectos que van a facilitar, la comprensión de ciertos aspectos de la lógica involucrada en la formulación de aporías, paradojas y antinomias.

Como vimos antes, la argumentación lógica unida a la argumentación matemática se usa para probar teoremas o para sustentar resultados técnicos de física o de otras áreas del conocimiento. Sin embargo, los antiguos griegos llevaron la argumentación lógico-matemática mucho más allá de lo ya mencionado, como por ejemplo, para investigar la naturaleza de la existencia de las cosas, incluyendo la naturaleza humana. El método de prueba basado puramente en la razón, o en argumentación lógica y matemática, se conoció como *método dialéctico* o *técnica dialéctica*: en cierto sentido, opuesto al método observacional, experimental o de medición para estudiar y analizar un fenómeno. Esta forma de razonar fue una innovación que a la larga se mantuvo y aún hoy la tenemos como herramienta efectiva en los procesos de demostración. El método dialéctico está inmerso en las obras de Platón y Aristóteles como ya lo destacamos en la prueba de la existencia de los irracionales, al probar por contradicción que la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables.

La Magna Grecia, geográficamente hablando, correspondía a la parte sur, de la Italia de hoy. En esa zona se formaron colonias importantes de gentes provenientes de la Hélade – así se llamaba la parte circundante del mar Mediterráneo – que compartían la lengua y rasgos étnicos, políticos y culturales con los pueblos que hoy llamamos griegos. Hubo ciudades importantes en la Magna Grecia, recordadas en la historia. Algunas por su exotismo, como fue el caso de la ciudad de Sibaris, donde el lujo y la extravagancia campearon. Decimos de alguien que es un *sibarita* o un *bon vivant* para significar que es alguien con gustos refinados o exquisitos, muy diferentes al del común. Otras ciudades de la Magna Grecia, como Crotona y Elea, se recuerdan por la calidad de la herencia intelectual que dejaron a la posteridad. Es en esta última ciudad, donde se origina la escuela eleática, que fue la patria chica de Parménides y de Zenón dos figuras importantes en la creación del método dialéctico. Zenón vivió alrededor del siglo V AC y fue discípulo de Parménides. Se cree que escribió varias obras filosóficas al estilo de su maestro, pero sólo ha pasado a la historia de la filosofía por referencias de Platón y Aristóteles, y por ser referenciado por el comentarista Simplicio (*fl.* 527-565 AD), mil años después. *Aporía* es un término griego derivado de $\pi o \rho o \xi$ que significa camino, salida, escape, y el prefijo negativo o privativo, $\alpha =$ sin. Su significado en nuestro idioma corresponde a una argumentación que conduce a una situación lógica irresoluble. Entendemos por *paradoja*, la demostración de que una contradicción o un absurdo se pueden derivar lógicamente de

[1] En este punto, en lo relacionado con diferentes tipos de paradojas, seguiremos a Devlin, Popper y la página Web de la Universidad de Stanford: http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/

asunciones aparentemente razonables. Antes de describir las paradojas de Zenón, debemos resaltar que éstas, no aparecen como producto de un loco que busca descrestar a sus contemporáneos, si no más bien, como una reacción de Zenón, a los ataques de que fuera objeto su maestro Parménides, quien, en su cosmología rechazaba la pluralidad (la multiplicidad, el número) y el cambio. En este enfoque filosófico, el ser era indivisible e inmutable y toda apariencia de lo contrario, era pura ilusión. Como afirma Popper, "para Parménides el mundo real era uno y siempre permanece en el mismo lugar, nunca se mueve. El mundo es uno, un todo indiviso, sin partes; homogéneo e inmóvil. El movimiento es imposible en un mundo semejante. En verdad no hay cambio alguno. El mundo del cambio es una ilusión"[2]. Las críticas a la posición de Parménides, obviamente llegaron de todas partes por cuanto se consideró absurdo y ridículo concebir una realidad congelada como en una toma fílmica, sin la posibilidad de movimiento o de cambio. Fue entonces cuando Zenón apareció en escena para probar a los contradictores de su maestro que a resultados igualmente absurdos se podía llegar aceptando tesis contrarias a las sostenidas por Parménides. Sostenía Zenón que el aceptar la pluralidad conducía por razonamientos lógicos legítimos, a la conclusión de que todo era infinitamente grande o infinitamente pequeño. Y que aceptar el movimiento como infinitamente divisible, nos lleva a la conclusión de que nada se mueve.

En la lógica tradicional, si los razonamientos lógicos son perfectamente válidos y conducen a una contradicción o a un absurdo, la conclusión de todo el proceso es que la hipótesis en la cual se inició la argumentación debe ser necesariamente falsa. Es importante no perder de vista los objetivos que Zenón tenía en mente cuando expone sus paradojas, como dice Tom M. Apostol en su cálculo[3], a Zenón hay que verlo no como a un loco, si no como a un alumno de postgrado, excepcionalmente brillante. No es tan importante en si la paradoja, como el objetivo contra el cual va dirigida. Usualmente hablamos de la paradoja pero olvidamos el propósito para el que fue formulada.

En la época de Parménides y Zenón, las escuelas filosóficas principales eran: el pitagorismo, que sostenía que la esencia de las cosas había que buscarla en los números, el atomismo de Demócrito, donde se aceptaba que todo ser estaba constituido por átomos, es decir por partículas indivisibles y la escuela de Heráclito, para la cual todo era flujo, movimiento y cambio. Decía Heráclito que nadie se baña en el mismo río, para significar que nada se preserva intacto y que todo deviene en nuevos seres.

Para abordar a Zenón en sus paradojas empecemos por las menos conocidas: las que se refieren a la pluralidad ontológica, en el sentido de la existencia de muchos seres en contraposición de la existencia de uno y solo uno, como sostenía Parménides: "en forma abstracta al Ser como lo ingénito, eterno, inmutable, uno y continuo". Estas paradojas de la pluralidad intentan probar cómo, usando la pluralidad por hipótesis, y siguiendo una argumentación lógica, se desemboca en absurdas conclusiones.

5.1 – Argumentación por densidad

De acuerdo al comentador Simplicio, Zenón propone la siguiente argumentación para atacar la multiplicidad. Si hay muchas cosas, esas muchas, deben ser tantas, que no sean ni más ni menos que las que verdaderamente son. Pero si hay tantas como se dicen ser, esas tantas, deben *estar limitadas*. Pero si están limitadas habrá otras cosas entre ellas que las separen; y entre éstas, otras, y otras y así *ad infinitum*. Por lo cual las cosas que son, deben *ser ilimitadas*.

---

[2] POPPER, K. R. *Conjeturas y Refutaciones*. Paidós. Barcelona. 1983. Pág. 185.
[3] APOSTOL, T. M. Calculus. Vol. I. Editorial Reverte. Bogotá. 1988.

La argumentación de Zenón intenta probar que, no puede existir la pluralidad so pena de incurrir en una contradicción. Con esto busca apoyar la tesis de su maestro sobre la unicidad del ser. Recordemos que la *ontología* es el estudio del ser como objeto filosófico. Este argumento de densidad lo encontramos en sección anterior cuando estudiábamos los números racionales y las cortaduras de Dedekind. En una cortadura se presentan apiñamientos (clusters) de números racionales, por ejemplo, si damos dos racionales, digamos de menor a mayor, a/b y c/d, estará entre ellos el número $(a/b + c/d)/2$ y entre estos tres, habrá dos más y entre estos cinco, cuatro más y así hasta el infinito. Con esto estamos mostrando que el conjunto Q es *denso* en R. Esta característica de los racionales dentro de los reales es muy importante en análisis matemático, por cuanto permite, como vimos a través de las cortaduras de Dedekind, aproximar todo número real x, tanto como se quiera, con números racionales. Los puntos de la recta también son densos en el sentido de que entre dos puntos siempre se puede encontrar otro (recuerde la idea de interestancia en geometría y continuidad en análisis). Sin embargo los puntos de la recta no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números racionales, como lo mostramos al probar que $\sqrt{2}$ no es racional. Esto significa que la recta real tiene "más" puntos que aquellos que los racionales puedan cubrir. Por lo tanto decimos que los reales tienen una *potencia* o un *cardinal* mayor que los números racionales. La clasificación de las potencias de los conjuntos la hizo Georg Cantor, generando así un nuevo enfoque para el estudio del infinito.

5.2 – La Paradoja de la Dicotomía.

Zenón argüía en los siguientes términos, a fin de "probar" que un corredor que parte de un punto A no puede llegar a la meta en el punto B: para recorrer la distancia AB, primero tiene que recorrer la mitad de esa distancia y luego la mitad de la mitad que le queda faltando y así indefinidamente. La argumentación terminaba sosteniendo que infinitas distancias no podían recorrerse en un tiempo finito. Para verlo mejor cuantitativamente, supongamos que la distancia AB es un kilómetro. Entonces el corredor debe correr primero medio kilómetro, hasta C, luego la mitad del medio kilómetro que le falta para llegar a la meta, es decir, llegar al punto D, luego deberá recorrer un octavo y así sucesivamente, al infinito. Según Zenón nunca se llegaría a la meta, porque infinitos tramos por recorrer no podría hacerse en un tiempo finito y así el movimiento, según el argumento de Zenón, era imposible.

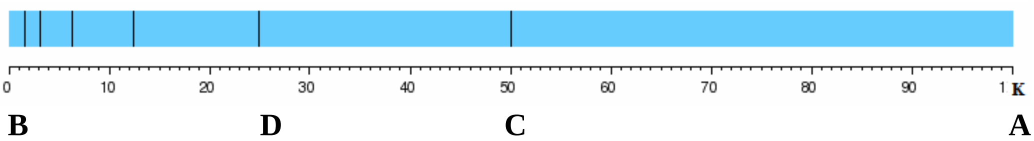

Fig. 5.3.1. Para que un corredor que parte del punto **A,** llegue al punto **B**, debe alcanzar primero el punto medio **C** y luego el punto **D** y así sucesivamente recorrer las mitades de lo faltante por recorrer.

Lo más interesante de la argumentación está, en asumir el hecho intuitivo de que, el movimiento es susceptible de dividirse en tramos, al igual que el tiempo, en instantes. Esta pluralidad era el objetivo de la polémica en la filosofía de Parménides. Asumir la pluralidad, entonces llevaba a la negación del movimiento. Hay que recordar que las matemáticas griegas no disponían de los recursos del cálculo infinitesimal, ni de la noción de series convergentes, que es lo que permite explicar conceptos como movimiento y sumas infinitas de cantidades. Para nosotros la paradoja de la dicotomía pierde su carácter paradojal, porque, la conclusión de que no se puede llegar del punto A al punto B, en un tiempo finito, no es válida, como lo mostraremos en las siguientes líneas.

Supongamos que la velocidad del corredor es constante y que la distancia entre el punto de partida y la meta es un kilómetro. Queremos probar que la suma de los infinitos tramos recorridos es efectivamente un kilómetro. Se trata de sumar ½ + ¼ +…. Este es un ejemplo de una serie geométrica de razón ½, donde el término siguiente a uno dado, se encuentra multiplicando a éste, por ½. En general todos los sumandos son de la forma $(\frac{1}{2})^n$, donde $n = 1, 2, 3,\ldots$ La suma de todos los términos se representa simbólicamente por la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$.

Este tipo de series so fáciles de calcular, pues por inducción, uno puede mostrar que:

$1 + r = (1 - r^2)/(1 - r) = 1/(1 - r) - r^2/(1 - r)$
$1 + r + r^2 = (1 - r^3)/(1 - r) = 1/(1 - r) - r^3/(1 - r)$
…
$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = (1 - r^n)/(1 - r) = 1/(1 - r) - r^n/(1 - r)$.

La suma de la izquierda se convierte en una serie infinita cuando n va a infinito. Y en la derecha cuando n va a infinito, supuesto que $|r| < 1$, todo se reduce a $1/(1 - r)$, porque $r^n/(1 - r)$ va a cero cuando n tiende a infinito. Se sigue entonces que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1/(1 - r), \qquad \text{si } |r| < 1. \qquad (*)$$

En el caso de la paradoja anterior contamos con r = ½ < 1 y la serie empieza en ½ en lugar de 1. Pero no importa, al resultado (*) restamos uno a ambos lados y encontramos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n = 1/(1 - \tfrac{1}{2}) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Que es lo que se espera para el recorrido desde A hasta B, supuesto que la distancia entre los puntos A y B es de 1 Kilómetro.

Si la velocidad no es constante, el problema se complica. Por ejemplo, pongamos por caso, la situación que propone Tom. M. Apostol en su cálculo[4]. Asumiendo que el primer tramo se recorre, digamos en media hora, el segundo en un tercio de hora, el tercer tramo en un quinto y así en adelante, en fracciones de hora, donde el denominador es el primo siguiente de aquel, de la fracción anterior, vamos a encontrar para la suma de los tiempos del recorrido, algo como: $\sum_{p=2}^{\infty} (1/p)$, donde p recorre los primos 2, 3, 5,…. En el tiempo de Euler se demostró que esta serie diverge. En este caso, nunca el corredor llegaría a la meta, porque el valor de la suma es infinito.

Euler probó esta curiosa igualdad: $\sum_{p=2}^{\infty} (1/p) = \prod_{p} \frac{1}{(1 - 1/p)}$.

Donde p recorre todos los primos, 2, 3, 5, 7,…. El símbolo de la derecha representa un producto infinito. Decimos curiosa, porque si ambas expresiones son infinitas, ¿en que sentido son iguales? Aquí el sentido es que, a medida que entran más y más primos en el proceso, los resultados en ambos lados de la expresión son cada vez más cercanos, aunque serán, desde luego, cada vez más y más grandes.

Siguiente Sección: ***Paradoja de Aquiles y la Tortuga***

---

[4] APOSTOL, T. M. *Calculus.* II Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1967. Pág. 374 y sgts.